

Title	Quasi-metric space 二就テ II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 92 p.27-p.34
Issue Date	1936-06-05
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74338
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

413. Quasi-metric space = 就テ II

角 谷 静 夫 (阪大)

R^* 7 metric space トシ R^* ノニ点 x, y ノ距離ガ
 $\rho(x, y) = \text{ヨリ異ヘテレルモノトスル}$ 。今 R^* ノ閉集合 A ,
 $B = \text{對シテ}$

$$\text{i) } \overline{AB} = \text{upper bound } \rho(a, b) \\ a \in A, b \in B$$

$$\text{ii) } \overrightarrow{AB} = \text{upper bound } \left\{ \text{lower bound } \rho(a, b) \right\} \\ b \in B \quad a \in A$$

$$\text{iii) } \underline{AB} = \text{lower bound } \rho(a, b) \\ a \in A, b \in B$$

トオケバ、コレ等ハ次ノ關係ヲ満足スル。

$$1^\circ \quad \overline{AB} \geq \overrightarrow{AB} \geq \underline{AB}, \quad \overrightarrow{AA} = \underline{AA} = 0$$

$$2^\circ \quad \overline{AB} + \overrightarrow{BC} \geq \overline{AC}$$

$$3^{\circ} \quad \underline{AB} + \underline{BC} \geq \underline{AC}$$

$$4^{\circ} \quad \overrightarrow{AB} + \underline{BC} \geq \underline{AC}$$

$$5^{\circ} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \geq \overrightarrow{AC}$$

1°ハ定義ヨリ明カデマリ、2°, 3°, 4°, 5°ハ $a \in A, b \in B, c \in C$ = 對シテ常ニ成立スル關係

$$\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$$

ヨリ容易ニ導クコトが出来ル。

R^* = 於ケル閉集合ヲ *element* トスル空間 R ヲ考ヘ
レバ R ノ *element* A, B = ハ i), ii), iii) = ヨツテ、 \overline{AB} ,
 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BA} , \underline{AB} ノ四種ノ距離ガ與ヘラレル。定義ヨリ
 $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\underline{AB} = \underline{BA}$ ナルコトハ明カデマルガ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
ハ必ずしも成立シナイ。Wilson ハ \overrightarrow{AB} ノ如ク *symmetric*
デナイ距離ニテ 5°ヲ満足スルモノヲ *quasi-metrics* ト
名付ケコノマツナ距離ガツケラレタ空間ヲ *quasi-metric*
space ト呼ンダ。

第87号385ニ於イテハ *quasi-metric space* R
ハ、 R^* ヲ適當ニトレバ R^* = 於ケル閉集合ヲ *element*
トスル空間 = ii) = ヨツテ *quasi-metric* ヲツケタモ
ノ = *iso-quasi-metric* ニナルコトヲ示シタ。

今回ハ、更ニ一般ニ、空間 R = 於イテソノ二点 A, B = 對
シテ $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, $\underline{AB} = \underline{BA}$ ガ 1°, 2°, 3°, 4°, 5°
ヲ満足スル如ク與ヘラレレバ、 R ハ R^* ヲ適當ニ取レバ
 R^* = 於ケル閉集合ヲ *element* トスル空間 = i), ii), iii)
ノ意味デ「距離」ヲツケタモノ = 「*iso-metric*」ニナルコ

トヲ示サウ。

証明: 先ツ與ヘラレタ \overline{AB} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BA} , \underline{AB} が何レモ
一様=有界ナル場合ヲ考ヘル。

R_1, R_2 ヲ共 = R ト合同ナ空間トシ空間 $R_1 + R_2$ (R_1, R_2 = ハ共通点ハナイモノトスル) = テ定義サレタ実数値ノ
一價函数ノ空間 R^* ヲ考ヘ、ソノニツノ element $g_1(x),$
 $g_2(x)$ = 點シテ距離 $d(g_1, g_2)$ ヲ

$$d(g_1, g_2) = \text{upper bound}_{x \in R_1 + R_2} |g_1(x) - g_2(x)|.$$

トオク。 $d(g_1, g_2)$ が有限ナル如キモノノミヲ考ヘルコ
ト = スレバ R^* ハ閉カ = *metric space* ナル。

R^* = 於ケル集合 F_A ヲ $x \in R_1$ = 於テハ

$$\overrightarrow{AX} \leq g(x) \leq \overline{AX} \quad (1)$$

$x \in R_2$ = 於テハ

$$\underline{XA} \leq g(x) \leq \overrightarrow{XA} \quad (2)$$

ヲ満足スル函数 $g(x)$ 全体ノ集合トスル。 F_A が R^* = 於
イテ閉集合ナルカラ、此ノ如ク定義サレタ F_A, F_B = 對
シテ

$$\text{I } \overline{AB} = \overline{F_A F_B} \equiv \text{upper bound}_{g_A \in F_A, g_B \in F_B} d(g_A, g_B)$$

$$\text{II } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_A F_B} \equiv \text{upper bound}_{g_B \in F_B, g_A \in F_A} \{ \text{lower bound } d(g_A, g_B) \}$$

$$\text{III } \underline{AB} = \underline{F_A F_B} \equiv \text{lower bound}_{g_A \in F_A, g_B \in F_B} d(g_A, g_B)$$

トナルコトヲ証明スレバヨイ。

I の証明

I, $\overline{F_A F_B} \leq \overline{AB}$ ナルコト。

任意ノ $\varphi_A \in F_A$, $\varphi_B \in F_B$ = 對シテ $X \in R_1$ ナルトキハ

(1) ヨリ

$$\varphi_A(X) - \varphi_B(X) \leq \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{BX} \leq \overline{AB} \quad (\text{by } 2^\circ)$$

$$\varphi_B(X) - \varphi_A(X) \leq \overrightarrow{BX} - \overrightarrow{AX} \leq \overline{BA} = \overline{AB} \quad (\text{by } 2^\circ)$$

デアリ、 $X \in R_2$ ナルトキハ (2) ヨリ

$$\varphi_A(X) - \varphi_B(X) \leq \overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} \leq \overline{BA} = \overline{AB} \quad (\text{by } 3^\circ)$$

$$\varphi_B(X) - \varphi_A(X) \leq \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA} \leq \overline{AB} \quad (\text{by } 3^\circ)$$

デアルカラ $X \in R_1 + R_2$ ナルトキ常ニ

$$|\varphi_A(X) - \varphi_B(X)| \leq \overline{AB}$$

が成立スル。即チ、 $d(\varphi_A, \varphi_B) \leq \overline{AB}$ 。 φ_A, φ_B ハ夫々

F_A, F_B ノ任意ノ函数デアツタカラ $\overline{F_A F_B} \leq \overline{AB}$ 。

I₂. $\overline{F_A F_B} \geq \overline{AB}$ ナルコト。

R_1 ノ点 A = 於テ考ヘレバ F_A ハ $X=A$ = 於テ $\overrightarrow{AA}=0$ トナル函数 $\varphi_A^\circ(X)$ ヲ含ミ F_B ハ $X=A$ = 於テ \overline{AB} トナル函数 $\varphi_B^\circ(X)$ ヲ含ム。コノ $\varphi_A^\circ(X), \varphi_B^\circ(X)$ = 對シテハ

$$d(\varphi_A^\circ, \varphi_B^\circ) \geq |\varphi_A^\circ(A) - \varphi_B^\circ(A)| = \overline{AB}$$

デアルカラ $\overline{F_A F_B} \geq \overline{AB}$ 。

II の証明

II, $\overrightarrow{F_A F_B} \leq \overrightarrow{AB}$ ナルコト。

コレヲ示スニハ φ_B 7 F_B = 属スル任意ノ函数トスル
トキ、コレニ對シテ適當ニ $\varphi_A^0 \in F_A$ ヲ定メテ

$$d(\varphi_A^0, \varphi_B) \leq \overrightarrow{AB} \quad (3)$$

ナル如クスルコトが出来ルコトヲ示セバヨイ。コノタメニハ
各ノ X_0 = 對シテ

$$|\varphi_A^0(X_0) - \varphi_B(X_0)| \leq \overrightarrow{AB} \quad (4)$$

ヲ満足スル $\varphi_A^0(X)$ ヲ作レバヨイ。

(a) $X_0 \in R_1$ ナル場合。コノトキハ $\varphi_B \in F_B$ ナル假定
ヨリ

$$\overrightarrow{BX_0} \leq \varphi_B(X_0) \leq \overrightarrow{BX_0}$$

デアアル。

(a-1) $\varphi_B(X_0) > \overrightarrow{AX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{AX_0}$ トオ
ク。スルト

$$0 < \varphi_B(X_0) - \varphi_A^0(X_0) \leq \overrightarrow{BX_0} - \overrightarrow{AX_0} \leq \overrightarrow{AB} \quad (\text{by } 2^\circ)$$

(a-2) $\overrightarrow{AX_0} \leq \varphi_B(X_0) \leq \overrightarrow{AX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \varphi_B(X_0)$

トオク。

(a-3) $\varphi_B(X_0) < \overrightarrow{AX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{AX_0}$ トオク。

スルト

$$0 < \varphi_A^0(X_0) - \varphi_B(X_0) \leq \overrightarrow{AX_0} - \overrightarrow{BX_0} \leq \overrightarrow{AB} \quad (\text{by } 5^\circ)$$

(b) $X_0 \in R_2$ ナル場合。コノトキハ $\varphi_B \in F_B$ ナル假定
ヨリ

$$\overrightarrow{X_0 B} \leq \varphi_B(X_0) \leq \overrightarrow{X_0 B}$$

デアアル。

(b-1) $\mathcal{P}_B(X_0) > \overrightarrow{X_0 A}$ ナルトキハ $\mathcal{P}_A^\circ(X_0) = \overrightarrow{X_0 A}$ トオ
ク。スルト

$$0 < \mathcal{P}_B(X_0) - \mathcal{P}_A^\circ(X_0) \leq \overrightarrow{X_0 B} - \overrightarrow{X_0 A} \leq \overrightarrow{AB} \quad (\text{by } 5^\circ)$$

(b-2) $\overrightarrow{X_0 A} \leq \mathcal{P}_B(X_0) \leq \overrightarrow{X_0 A}$ ナルトキハ $\mathcal{P}_A^\circ(X_0) = \mathcal{P}_B(X_0)$
トオク。

(b-3) $\mathcal{P}_B(X_0) < \overrightarrow{X_0 A}$ ナルトキハ $\mathcal{P}_A^\circ(X_0) = \overrightarrow{X_0 A}$ トオ
ク。スルト

$$0 < \mathcal{P}_A^\circ(X_0) - \mathcal{P}_B(X_0) \leq \overrightarrow{X_0 A} - \overrightarrow{X_0 B} \leq \overrightarrow{AB} \quad (\text{by } 4^\circ)$$

此ノ如ク各ノ X_0 = 對シテ $\mathcal{P}_A^\circ(X_0)$ ヲ定義スルベ、コノ $\mathcal{P}_A^\circ(X)$
= 對シテ (4) シタガツテ (3) が成立スル。

$\mathcal{P}_B(X)$ ハ F_B ノ任意ノ函数デアッタカラ $\overrightarrow{F_A F_B} \leq \overrightarrow{AB}$
ヲ得ル。

$$\text{II}_2 \quad \overrightarrow{F_A F_B} \geq \overrightarrow{AB} \quad \text{ナレコト。}$$

R_2 ノ点 A = 於イテ考ヘルベ F_B ハ $X=A$ = 於テ \overrightarrow{AB}
トナル函数 $\mathcal{P}_B^\circ(X)$ ヲ含ムガ F_A = 属スル函数ハ何レモ
 $X=A \in R_2$ = 於テ $\overrightarrow{AA} = \underline{AA} = 0$ デアルカラ、コノ $\mathcal{P}_B^\circ(X) =$
對シテハ任意ノ $\mathcal{P}_A \in F_A$ = 對シテ

$$d(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B^\circ) \geq |\mathcal{P}_A(A) - \mathcal{P}_B^\circ(A)| = \overrightarrow{AB}$$

デアル。即チ

$$\text{lower bound } d(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B^\circ) \geq \overrightarrow{AB} \\ \mathcal{P}_A \in F_A$$

依ツテ勿論

$$\overrightarrow{F_A F_B} \geq \overrightarrow{AB}$$

III. / 証明

III. $F_A F_B \leq AB$ ナルコト。

コノタメニハ適當ニ $\varphi_A^0 \in F_A, \varphi_B^0 \in F_B$ ヲ取ツテ之レガスベテノ $X_0 \in R_1 + R_2$ ニ對シテ

$$|\varphi_A^0(X_0) - \varphi_B^0(X_0)| \leq AB \quad (5)$$

ヲ満足スルモノニナルコトが出来ルコトヲ示セバヨイ。

(a) $X_0 \in R_1$ ナルトキ

(a-1) $\overrightarrow{AX_0} > \overrightarrow{BX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{AX_0}, \varphi_B^0(X_0) = \overrightarrow{BX_0}$ トオケバ

$$0 < \varphi_A^0(X_0) - \varphi_B^0(X_0) = \overrightarrow{AX_0} - \overrightarrow{BX_0} \leq AB \quad (\text{by } 3^\circ)$$

(a-2) $\overrightarrow{AX_0} \leq \overrightarrow{BX_0}, \overrightarrow{AX_0} \geq \overrightarrow{BX_0}$ ナルトキハ $\overrightarrow{AX_0} \leq \xi \leq \overrightarrow{AX_0}, \overrightarrow{BX_0} \leq \xi \leq \overrightarrow{BX_0}$ ヲ同時ニ満足スル ξ が存在スルカラ $\varphi_A^0(X_0) = \varphi_B^0(X_0) = \xi$ トオケバヨイ。

(a-3) $\overrightarrow{AX_0} < \overrightarrow{BX_0}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{AX_0}, \varphi_B^0(X_0) = \overrightarrow{BX_0}$ トオケバ

$$0 < \varphi_B^0(X_0) - \varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{BX_0} - \overrightarrow{AX_0} \leq AB \quad (\text{by } 3^\circ)$$

(b) $X_0 \in R_2$ ナルトキ

(b-1) $\overrightarrow{X_0A} < \overrightarrow{X_0B}$ ナルトキハ $\varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{X_0A}, \varphi_B^0(X_0) = \overrightarrow{X_0B}$ トオケバ

$$0 < \varphi_B^0(X_0) - \varphi_A^0(X_0) = \overrightarrow{X_0B} - \overrightarrow{X_0A} \leq AB \quad (\text{by } 4^\circ)$$

(b-2) $\overrightarrow{X_0A} \geq \overrightarrow{X_0B}, \overrightarrow{X_0A} \leq \overrightarrow{X_0B}$ ナルトキハ $\overrightarrow{X_0A} \leq \xi \leq \overrightarrow{X_0A}, \overrightarrow{X_0B} \leq \xi \leq \overrightarrow{X_0B}$ ヲ同時ニ満足スル ξ が存在スルカラ $\varphi_A^0(X_0) = \varphi_B^0(X_0) = \xi$ トオケバヨイ。

(a-3) $\underline{X_0 A} > \overrightarrow{X_0 B}$ ナルトキハ $\varphi_A^\circ(X_0) = \underline{X_0 A}$,
 $\varphi_B^\circ(X_0) = \overrightarrow{X_0 B}$ トオケル

$$0 < \varphi_A^\circ(X_0) - \varphi_B^\circ(X_0) = \underline{X_0 A} - \overrightarrow{X_0 B} \leq \underline{AB} \quad (\text{by } 4^\circ)$$

此ノ如ク $\varphi_A^\circ(X)$, $\varphi_B^\circ(X)$ ヲ定義スレバ之レハ明カニ
 スベテノ $X_0 \in R_1 + R_2$ = 對シテ (5) ヲ満足スル。即チ

$$d(\varphi_A^\circ, \varphi_B^\circ) \leq \underline{AB}$$

依ツテ

$$\underline{F_A F_B} \leq \underline{AB}$$

III₂. $\underline{F_A F_B} \geq \underline{AB}$ ナルコト。

R_2 ノ点 A = 於イテ考ヘレバ F_A = 属スル φ_A ハス
 ベテ $A = \overrightarrow{AA} = \underline{AA} = 0$ ナル値ヲ取ル = 反シ F_B = 属ス
 ル φ_B ノ取ル値ハ

$$\underline{AB} = \underline{BA} \leq \varphi_B(A) \leq \overrightarrow{BA}$$

デアル。故ニ、任意ノ $\varphi_A \in F_A$, $\varphi_B \in F_B$ = 對シテ

$$d(\varphi_A, \varphi_B) \geq |\varphi_A(A) - \varphi_B(A)| = |\varphi_B(A)| \geq \underline{AB}$$

之レヨリ

$$\underline{F_A F_B} \geq \underline{AB}$$

ヲ得。